Zeri di funzioni continue

Teorema ("Esistenza degli zeri per funzioni continue") *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione Chiaramente, basta considerare il caso $f(a) > 0 > f(b)$ (altrimenti si consideri $-f$ al posto di f).
Definiamo ricorsivamente due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ come segue:

$a_1 := a$, $b_1 := b$ e se $n \geq 1$ definiamo $c_n := (a_n + b_n)/2$ e

$$\text{se } f(c_n) > 0\ ,\ \text{ allora } \begin{cases} a_{n+1} := c_n \\ b_{n+1} := b_n \end{cases} \tag{i}$$

$$\text{se } f(c_n) < 0\ ,\ \text{ allora } \begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c_n \end{cases} \tag{ii}$$

$$\text{se } f(c_n) = 0\ ,\ \text{ allora } \quad a_{n+1} := b_{n+1} := c_n\,. \tag{iii}$$

Ci sono due casi: o esiste $n \geq 2$ tale che $f(c_n) = 0$ oppure $f(c_n) \neq 0$ per ogni n.
Nel primo caso, poniamo $x_0 = c_n$ e il teorema è dimostrato.

Nel secondo caso, si ha che $\{a_n\}$ è crescente, $\{b_n\}$ è decrescente; per ogni n, $f(a_n) > 0 > f(b_n)$;

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} \tag{1}$$

(la seconda uguaglianza segue immediatamente per induzione). In particolare $a_n < b_n$ per ogni n e quindi $a_n < b_m$ per ogni n ed[1] m. Dal teorema sull'esistenza dei limiti per successioni monotòne e dal teorema del confronto segue che

$$\lim a_n = \sup a_n =: \alpha \leq \beta := \inf b_n = \lim b_n\,. \tag{2}$$

Ma allora

$$\beta - \alpha = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) \overset{(1)}{=} \lim \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0\,.$$

Poniamo ora $x_0 = \alpha = \beta$. Per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$. Ma poiché $f(a_n) \geq 0$ si deve avere (teorema del confronto) $f(x_0) \geq 0$ e poiché $f(b_n) \leq 0$ si deve avere $f(x_0) \leq 0$ il che implica che $f(x_0) = 0$. ∎

Corollario ("Esistenza del primo zero per funzioni continue") *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$ e tale che $f(x) \cdot f(a) > 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$.*

Dimostrazione Sia $E := \{\bar{x} \in (a,b) \big| f(\bar{x}) = 0\}$. Per il teorema $E \neq \varnothing$ (e per definizione $E \subseteq (a,b)$ ed è quindi limitato). Sia $x_0 = \inf E \geq a$. Dalla caratterizzazione per successioni dell'estremo inferiore segue che esiste una successione $x_n \in E$ tale che $x_n \to x_0$ e per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(x_n)$, ma essendo $f(x_n) = 0$ per ogni n segue che $f(x_0) = 0$, ossia $x_0 \in E$ è il *minimo* di E. In particolare $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$, ma allora $f(x)$ deve avere lo stesso segno di $f(a)$ (altrimenti per il teorema si avrebbe uno zero tra a e $x < x_0$ contraddicendo la minimalità di x_0). ∎

[1] Se $n < m$, allora $a_n \leq a_m < b_m$ e se $n > m$, allora $a_n < b_n \leq b_m$.

Valori intermedi

Teorema dei valori intermedi[2] *Sia I un intervallo e $f \in C(I)$. Allora f assume tutti i valori tra due valori dati $y_i = f(x_i)$, $x_i \in I$. Più precisamente, se $x_1 < x_2$ sono due punti di I, $y_i = f(x_i)$, $\bar{y}_1 = \min\{y_1, y_2\}$, $\bar{y}_2 = \max\{y_1, y_2\}$, allora per ogni $\bar{y} \in [\bar{y}_1, \bar{y}_2]$, esiste $\bar{x} \in [x_1, x_2]$ tale che $\bar{y} = f(\bar{x})$.*

Dimostrazione Se $\bar{y} = y_i$, prendiamo $\bar{x} = x_i$. Supponiamo ora che $\bar{y} \neq y_i$, ossia che $\bar{y}_1 < \bar{y} < \bar{y}_2$. Poniamo $F(x) := f(x) - \bar{y}$. Allora $F \in C([x_1, x_2])$ e[3] $F(x_1) \cdot F(x_2) < 0$ e l'asserto segue dal teorema di esistenza degli zeri. $\blacksquare$

Osservazione (i) Dalla definizione di intervallo segue che *una funzione continua manda intervalli in intervalli.*

(ii) Dal teorema segue immediatamente che *una funzione continua f su I intervallo assume tutti i valori compresi (strettamente) tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.* Infatti, dalla caratterizzazione di inf e sup segue che se $\inf_I f < \bar{y} < \sup_I f$, esistono due punti $\bar{x}_i \in I$ tali che $\inf_I f \leq f(\bar{x}_1) < \bar{y} < f(\bar{x}_2) \leq \sup_I f$ e l'asserto segue dal teorema.

[2] Cfr. Teorema 2.66.

[3] Se $\bar{y}_i = y_i$, $F(x_1) < 0 < F(x_2)$; se $\bar{y}_1 = y_2$ e $\bar{y}_2 = y_1$, allora $F(x_1) > 0 > F(x_2)$.